1.15) $C^{\infty}(\mathbb{R})$ son todas las funciones en $\mathbb{R}$ que son infinitamente derivables y sus derivadas son continuas.

a) $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

Existe la derivada de cualquier orden y continuas para todos los componentes, por lo que está contenido en $C^{\infty}(\mathbb{R})$

Me fijo si es LI por definición:

Se tiene que cumplir:

$\alpha_0.(1) + \alpha_1.(x) + \alpha_2(x^2) + \dots + \alpha_n(x^n) = 0$

Solo si $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ para ser LI.

Como es un polinomio, para dar $= 0$ todos los coeficientes deben ser 0, entonces como todos los parámetros tienen solo $x$ de distinto grado, para ser 0:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Como es la solución trivial, es LI.}$$

b) $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \dots, x^m e^{\lambda x}\}$

Las componentes son derivables en cualquier orden, y continuas por lo que está contenido en $C^\infty(\mathbb{R})$.

Veo si es LI por definición:

Se tiene que cumplir:

$$\alpha_0 . (e^{\lambda x}) + \alpha_1 . (xe^{\lambda x}) + \alpha_2 . (x^2 e^{\lambda x}) + \dots + \alpha_m (x^m e^{\lambda x}) = 0$$

Solo con $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ para ser LI.

Reescribo la ecuación sacando factor común $e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x} . (\alpha_0 .(1) + \alpha_1 . (x) + \alpha_2 . (x^2) + \dots + \alpha_m (x^m)) = 0$$

Como $e^{\lambda x} > 0$ entonces esta ecuación se cumple solo si los coeficientes del polinomio son $= 0$, por lo ya calculado en a) es LI.

c) $\{\underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{F_1}, \underbrace{e^{\lambda_2 x}}_{F_2}, \dots, \underbrace{e^{\lambda_m x}}_{F_m}\}$ , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ no repetidos

distintos dos a dos.

Veo si es LI por Wronskiano.

Las componentes tienen derivadas de cualquier orden, y continuas. así que está contenido en $C^\infty(\mathbb{R})$.

Como tiene $m$ elementos, tengo que derivar $m-1$ veces c/u.

$F_1' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$, $F_1''(x) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}$, $\dots$, $F_1^{m-1}(x) = \lambda_1^{m-1} e^{\lambda_1 x}$

$F_2' = \lambda_2 e^{\lambda_2 x}$, $F_2''(x) = \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}$, $\dots$, $F_2^{m-1}(x) = \lambda_2^{m-1} e^{\lambda_2 x}$

$\vdots$

$F_m' = \lambda_m e^{\lambda_m x}$, $F_m''(x) = \lambda_m^2 e^{\lambda_m x}$, $\dots$, $F_m^{m-1}(x) = \lambda_m^{m-1} e^{\lambda_m x}$

Armo la matriz del Wronskiano:

$$W(F(x)) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_m x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \vdots & \lambda_m e^{\lambda_m x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \vdots & \lambda_m^2 e^{\lambda_m x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{m-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_m^{m-1} e^{\lambda_m x} \end{vmatrix}$$

Por Prop. del determinante si tengo un factor común en una columna o en una fila, lo puedo extraer.

$$\rightarrow W(F(x)) = \underbrace{e^{\lambda_1 x}}_{\neq 0} \cdots \underbrace{e^{\lambda_m x}}_{\neq 0} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \vdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \vdots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

sabemos que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_m$.

El determinante que quedó se lo llama determinante de Vandermonde y tiene un teorema que dice que si los escalares son todos distintos, como en este caso, ese determinante da distinto de 0.

Por lo tanto el Wronskiano $W(F(x)) \neq 0$ $\forall x \in DF \rightarrow$ es LI

ya que si hay al menos un $x_0 \in DF$ donde $W(F(x_0)) \neq 0$ ya puedo afirmar que es LI.